Prof. Dr. Norbert Dragon
PD Dr. Mic$\hbar$ael Flohr
Abgabe 05.05.2015 vor der Vorlesung

INTEGRALSÄTZE UND VEKTORFELDER

In der Elektrodynamik spielen Vektorfelder eine große Rolle. Insbesondere sind Integralsätze hilfreich, um die zu Ladungs- und Stromverteilungen gehörenden Vektorfelder zu berechnen.

[H8] *Elektrisches Feld einer homogen geladenen Kugel* **[$4+4=8$ Punkte]**

Berechnen Sie die Rotation $(\mathrm{rot}\vec{E})^i = \varepsilon^{ijk}\partial_j E^k$ und die Divergenz $\mathrm{div}\vec{E} = \partial_i E^i$ des elektrischen Feldes einer homogen geladenen Kugel, die den Radius R hat und die Ladung Q trägt,

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{R^3}\vec{x} & \text{falls} \quad r < R \\ \frac{1}{4\pi}\frac{Q}{r^2}\vec{e}_r & \text{falls} \quad r \geq R \end{cases} .$$

[H9] *Satz von Stokes* **[$5+5+5^* = 10+5^*$ Punkte]**

Es seien A_x und A_y zwei Funktionen auf der Dreiecksfläche $F = \{(x,y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$.

(a) Beim Flächenintegral

$$\int_F \mathrm{d}x\mathrm{d}y\Big(\partial_x A_y(x,y) - \partial_y A_x(x,y)\Big)$$

kann bei jedem Term je eine der Integrationen sofort ausgeführt werden (welche?). Beachten Sie dabei, dass Unter- und Obergrenze dieser Integrationen von der jeweils verbleibenden Integrationsvariablen abhängen. Zeigen Sie, dass das eindimensionale Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}u\Big(A_x(u,0) + A_y(1,u) - A_x(u,u) - A_y(u,u)\Big)$$

übrig bleibt. Hierbei ist die Bezeichnung der Integrationsvariable willkürlich und unwesentlich.

(b) Machen Sie sich nun klar, dass bei diesem Beispiel das Flächenintegral über die Rotation

$$\int_F \mathrm{d}\vec{f}\,\mathrm{rot}\vec{A} = \int_{\partial F} \mathrm{d}\vec{r}\cdot\vec{A}$$

gleich dem Umlaufintegral über die Randkurve ist.

(c*) Können Sie mit Hilfe dieses Beispiels den Satz von Stokes auch für allgemeine Flächen zeigen?

[H10] *Satz von Gauß* **[$6+6=12$ Punkte]**

Es seien E_x, E_y und E_z Funktionen auf dem Prisma $V = \{(x,y,z) : 0 \leq y \leq x \leq 1, 0 \leq z \leq h\}$.

(a) Beim Volumenintegral

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\mathrm{div}\vec{E}$$

kann der erste Term der Divergenz ohne weiteres mit dem Hauptsatz der Integralrechnung über x, der zweite über y und der dritte über z integriert werden. Zeigen Sie, dass von den ersten beiden Termen das zweidimensionale Integral

$$\int_0^1 \mathrm{d}u \int_0^h \mathrm{d}z\Big(E_x(1,u,z) - E_x(u,u,z) + E_y(u,u,z) - E_y(u,0,z)\Big)$$

übrigbleibt (wie in [H9] ist der Name der ersten Integrationsvariablen willkürlich und irrelevant).

(b) Zeigen Sie nun, dass in diesem Beispiel die Volumenintegration über die Divergenz

$$\int_V \mathrm{d}^3x\,\mathrm{div}\vec{E} = \int_{\partial V}\mathrm{d}\vec{f}\cdot\vec{E}\,, \quad (\mathrm{d}\vec{f})^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^k\,,$$

gleich dem Oberflächenintegral über die Randfläche von V ist.

HINWEIS

Bitte geben Sie auf Ihren abgegebenen Lösungen immer Name, Vorname, Matrikelnummer und die Übungsgruppe (Nummer und Name des Tutors) an! Lösungen unbedingt zusammenheften!